http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 6 A

1. Déterminer si les suites données par les termes généraux suivants sont croissantes, décroissantes, et / ou bornées :

a) $\frac{\sqrt{2}}{n}$ b) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$ c) $n^2 - n$ d) $\frac{(-1)^n n}{\sin(\pi(n+1))}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (a_n) pour $n \in \mathbb{N}$ la suite de terme général

$$a_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

a) Pour $a \neq 1$ démontrer que

$$a_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

b) Pour $|a| < 1$, calculer $\lim_{n\to\infty} a_n$.

c) Trouver la limite de

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}$$

lorsque n tends vers l'infini.

d) Pour $a \geq 1$, que vaut $\lim_{n\to\infty} a_n$?

3. Soit (s_n) une suite telle que

$$|s_{n+1} - s_n| < 2^{-n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que c'est une suite de Cauchy.

4. Trouver un exemple d'une suite (t_n) qui vérifie

$$|t_{n+1} - t_n| < \frac{1}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais qui n'est pas une suite de Cauchy.

5. Soit $s_1 = 1$ et $s_{n+1} = \frac{n}{n+1} s_n^2$ pour $n \geq 1$.

a) Trouver s_n pour $n \leq 4$.

b) Montrer que cette suite a une limite.

c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.